

3. Соболев, И.Д. Создание промышленных ТЭЦ малой мощности на базе действующих котельных / И.Д. Соболев // Экологические и ресурсосбережение. – 1996. – №2. – С.3-10.
4. Соколов, Е.Я. Теплофикация и тепловые сети / Учебник для ВУЗов. 5-е изд., перераб. – М.: Энергоиздат, 1982. – 352 с.
5. Шемаханов, М.М. Отопление шахтных стволов. – М.: Государственное научно-техническое издательство литературы по горному делу, 1960. – 204 с.
6. Васильев, А.В. Новая схема перевода паровых котлов типа ДКВР в водогрейный режим работы [Текст] / А.В. Васильев, Г.В. Антропов, Ю.И.Акимов // Новости теплоснабжения. - 2002.- № 11(27).- С. 25 – 28.
7. Акопянц, Б.Е. Перевод промышленных паровых котлов в водогрейный режим работы [Текст] / Б.Е. Акопянц // Новости теплоснабжения. - 2000.- № 2(2).- С. 21 – 23.
8. Глущенко, Л.Ф. Перевод промышленно-отопительных котлов с парового на водогрейный режим [Текст] / Л.Ф. Глущенко, Д.С. Шевцов, Б.В. Кунцевич. - Киев: Будівельник, 1982.- 56 с.
9. Пат. 2184244 Российская Федерация, 7 F01D 17/04. Гидропаровая турбинная установка / О.О. Мильман, В.А. Федоров, Н.А. Брусницын. - № 2000123491/06; Заявл. 11.09.2000; Оpubл. 27.06.2002, Бюл. № 18.
10. Пат. 90232 Украина, F01 D1/00. Реактивная турбина / Булат А.Ф., Чемерис І.Ф. - № а200906198; Заявл. 15.06.09; Оpubл. 12.04.10, Бюл. № 7.

УДК 622.7:741.6:532.5

Д-р техн. наук, профессор В.П. Надутый
канд. физ-мат. наук В.И. Елисеев
канд. техн. наук В.И. Луценко

РАВНОВЕСНОЕ СОСТОЯНИЕ ОСТАТОЧНОЙ МАССЫ ЖИДКОСТИ В КАПИЛЛЯРЕ С ПОДСТИЛАЮЩЕЙ СЕТКОЙ

Проведено чисельні розрахунки залишкової маси рідини в капілярі з підстилаючої сіткою матеріалу, що змочується. Показані граничні випадки існування рівноважного стану системи капіляр-крапля. Отримані рішення обмежені стійкістю краплі, що висить під сіткою. Показано, що об'єм залишкової рідини залежить від крайових кутів змочування і перепаду тиску.

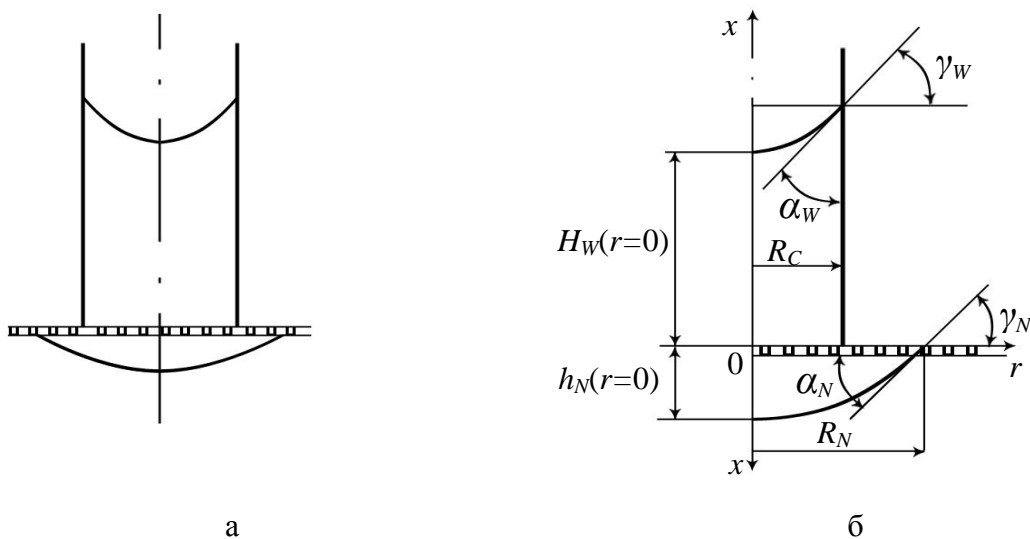
THE EQUILIBRIUM STATE OF RESIDUAL MASS OF LIQUID IN A CAPILLARY WITH MESH MATERIAL ATTACHED TO ITS LOWER END

Numerical calculations of the residual mass of liquid in a capillary with wettable mesh material attached to its lower end have been performed. Boundary cases of equilibrium state of the "capillary-drop" system are shown. The obtained solutions are limited by the stability of drops hanging from the bottom of the mesh material. It is shown that the volume of residual liquid depends on the contact angles and the pressure difference.

Просеивание рудной массы в значительной степени затрудняется ее влажностью, вследствие этого обезвоживание является важной стадией в технологии обработки. Одним из основных вопросов при обезвоживании является определение остаточной массы воды, остающейся в порах рудной массы после вытекания ее под действием сил гравитации. Учитывая, что рудная масса лежит на сетке, под остаточной водой можно понимать всю массу воды, которая находится не только в порах, но и снизу под сеткой. Эта вода располагается под сеткой в виде пленки с какими-то висющими каплями. Для упрощенного моделирования этой картины, представим, как это принято в литературе, поровое пространство пористого материала над сеткой в виде капиллярной трубки.

В работе [1] было показано, что при опускании слоя жидкости в капилляре, вследствие наличия капиллярных сил, в трубке должна оставаться вода. Высота оставшегося слоя определяется геометрическими особенностями трубки, сопротивлением сетки на нижнем конце капилляра, углом смачивания воды. Еще

одним важным фактором, который трудно учесть, является динамика распада струи под сеткой. Этот распад струи, обусловленный неустойчивостью и волновым характером движения, дает возможность жидкости попасть на нижнюю поверхность капиллярной трубки. В конце слива жидкости, когда скорости значительно падают, начинают преобладать капиллярные силы, в результате чего в капилляре остается слой жидкости, а под капилляром образуется капля (рис.1 а). Сформированная таким образом конфигурация может быть достаточно устойчивой. Покажем на примере плоской линейной и осесимметричной нелинейной задачах, какими свойствами обладает такая система. Представим, согласно рис. 1, что оставшаяся жидкость образует два соединенных вместе объема - слой в капилляре и каплю под капилляром. Нижний срез трубки с сеткой представим как плоскость, под которой находится капля воды, имеющая, благодаря смачиванию, определенную границу (рис.1 б).



$h_N(r=0)$ – поверхность капли; H_W – поверхность жидкости в капилляре; R_C – радиус капилляра; R_N – радиус капли; α_N – угол смачивания жидкостью материала сетки; α_W – угол смачивания жидкостью стенки капилляра; γ_N – угол между осью r и касательной к поверхности капли; γ_W – угол между осью r и касательной к поверхности мениска

Рис. 1 - Схема расположения остаточной жидкости в капилляре с подстилающей сеткой

При рассмотрении этой задачи, разобьем всю область, как это было сделано в [2], на две составляющие части: верхнюю (капилляр) и нижнюю (капля). Используя вывод уравнений, проделанный в [2] будем иметь следующие уравнения:

для верхней части (ось x направлена вверх)

$$\sigma \left[\frac{H''_{rr}}{\left(1 + H_r'^2\right)^{3/2}} + \frac{H'_r}{r\left(1 + H_r'^2\right)^{1/2}} \right] = \rho g H - (p_0 - p_a), \quad (1)$$

для нижней части (здесь, как и в [2], примем для удобства, что ось x направлена вниз)

$$\sigma \left[\frac{h''_{rr}}{\left(1 + h_r'^2\right)^{3/2}} + \frac{h'_r}{r\left(1 + h_r'^2\right)^{1/2}} \right] = -\rho g h - (p_0 - p_b), \quad (2)$$

где r - соответственно продольная и поперечная координаты; σ - коэффициент поверхностного натяжения; H - высота слоя жидкости в капилляре; h - высота нижнего слоя; p_a - атмосферное давление; p_0 - давление на срезе капилляра; p_b - давление под каплей; g - ускорение свободнопадающего тела; ρ - плотность жидкости.

Для решения уравнений (1,2) следует привести их к безразмерному виду:

$$\left[\frac{1}{\left(1 + \left(\frac{dh_W}{dn_W}\right)^2\right)^{3/2}} \frac{d^2 h_W}{dn_W^2} + \frac{1}{n_W \left(1 + \left(\frac{dh_W}{dn_W}\right)^2\right)^{1/2}} \frac{dh_W}{dn_W} \right] = Bo h_W - \frac{R_c (p_0 - p_a)}{\sigma}, \quad (3)$$

$$\left[\frac{\frac{d^2 h_N}{dn_N^2}}{\left(1 + \left(\frac{R_c}{R_N} \frac{dh_N}{dn_N}\right)^2\right)^{3/2}} + \frac{\frac{dh_N}{dn_N}}{n_n \left(1 + \left(\frac{R_c}{R_N} \frac{dh_N}{dn_N}\right)^2\right)^{1/2}} \right] = -Bo \left(\frac{R_N}{R_c}\right)^2 h_N - \left(\frac{R_N}{R_c}\right)^2 \frac{R_c (p_0 - p_b)}{\sigma}. \quad (4)$$

Здесь были введены следующие величины: $n_W = \frac{r}{R_c}$, $h_W = \frac{H}{R_c}$, $n_N = \frac{r}{R_N}$,

R_N - радиус окружности, по которой висящая капля смачивает поверхность,

$$h_N = \frac{h}{R_c}, \quad Bo = \frac{\rho g R_c^2}{\sigma}.$$

Граничные условия для уравнений (3), (4) запишутся следующим образом (см. рис. 1 б):

$$\left. \frac{dh_W}{dn_W} \right|_{n_W=0} = 0, \quad \left. \frac{dh_W}{dn_W} \right|_{n_W=1} = \theta_W, \quad \theta_W = \text{tg}(\gamma) = \frac{1}{\text{tg}(\alpha_W)}, \quad (5)$$

$$\left. \frac{dh_N}{dn_N} \right|_{n=0} = 0, \quad h_N(1) = 0, \quad \left. \frac{dh_N}{dn_N} \right|_{n=1} = -\frac{R_N}{R_c} \theta_N, \quad \theta_N = \text{tg} \alpha_N, \quad (6)$$

где α_W , α_N углы смачивания поверхностей соответственно в капилляре и на нижней поверхности. Таким образом, уравнения (3), (4) и граничные условия (5), (6) определяют статическое положение жидких слоев в капиллярной трубке и под ней.

Прежде чем привести результаты численных расчетов, покажем некоторые предельные случаи таких состояний на более простом примере – рассмотрим плоский случай в линейной постановке задачи. Отбросив нелинейные члены в уравнениях (3), (4) и перейдя к плоскому случаю, получим

$$\frac{d^2 h_W}{dn_W^2} - Bo h_W = -\frac{R_c(p_0 - p_a)}{\sigma}, \quad (7)$$

$$\frac{d^2 h_N}{dn_N^2} + Bo \left(\frac{R_N}{R_c} \right)^2 h_N = -\left(\frac{R_N}{R_c} \right)^2 \frac{R_c(p_0 - p_b)}{\sigma}. \quad (8)$$

Выпишем аналитический вид решения этих уравнений с учетом граничных условий

$$h_W = \frac{R_c(p_0 - p_a)}{\sigma Bo} + \frac{\theta_W}{\chi_W} \frac{\exp(\chi_W n_W) + \exp(-\chi_W n_W)}{\exp(\chi_W) - \exp(-\chi_W)}, \quad (9)$$

$$h_N = -\frac{\theta_N}{\chi_N \text{tg}(\chi_N)} \frac{R_N}{R_c} \left[1 - \frac{\text{Cos}(\chi_N n_N)}{\text{Cos}(\chi_N)} \right], \quad (10)$$

$$\chi_W = (Bo)^{1/2}, \quad \chi_N = \frac{R_N}{R_c} (Bo)^{1/2},$$

при этом должно выполняться условие, что

$$\frac{R_c(p_0 - p_b)}{\sigma Bo} = \frac{\theta_N}{\chi_N \operatorname{tg}(\chi_N)} \frac{R_N}{R_c}. \quad (11)$$

Подставляя это равенство в (9), будем иметь

$$h_w = \frac{\theta_N}{\chi_N \operatorname{tg}(\chi_N)} \frac{R_N}{R_c} + \frac{\theta_w}{\chi_w} \frac{\exp(\chi_w n_w) + \exp(-\chi_w n_w)}{\exp(\chi_w) - \exp(-\chi_w)} + \frac{R_c(p_b - p_a)}{\sigma Bo}. \quad (12)$$

Положив $p_b = p_a$, при $n_N = n_w = 0$ получим

$$h_w = \frac{\theta_N}{\chi_N \operatorname{tg}(\chi_N)} \frac{R_N}{R_c} + \frac{2\theta_w}{\chi_w [\exp(\chi_w) - \exp(-\chi_w)]}, \quad (13)$$

$$h_N = \frac{\theta_N}{\chi_N \operatorname{Sin}(\chi_N)} \frac{R_N}{R_c} [1 - \operatorname{Cos}(\chi_N)]. \quad (14)$$

Выписанное решение ограничено устойчивостью капли. В [3] принимается, что капля устойчива до тех пор, пока на кривой, описывающей ее поверхность, не появляется точка перегиба. В нашем линейном случае первая точка перегиба может возникнуть при $n_N = 1$, если $\chi_N = \pi/2$, т.е. предельное значение радиуса капли у основания при любых числах Бонда

$$R_N/R_c < \pi/2Bo^{1/2}. \quad (15)$$

Принимая во внимание, что отношение R_N/R_c должно быть больше единицы, тогда получаем максимальное число Бонда, которое обуславливает существование капли $Bo = \frac{\pi^2}{4}$ или из определения числа Бонда

$$R_c \leq \frac{\pi}{2} \left(\frac{\sigma}{\rho g} \right)^{1/2}. \quad (16)$$

Формула (16) определяет максимальную ширину плоского канала, для которого на пределе устойчивости может существовать капля, для воды эта величина будет равна 0,0042 м.

Для предельных устойчивых значений размеров капли ($\chi_N = \pi/2$)

$$\frac{R_N}{R_c} = \frac{\pi}{2Bo^{1/2}}, \quad h_N = \frac{\theta_N}{Bo^{1/2}}, \quad (17)$$

откуда видно, что с уменьшением числа Бонда растут относительные размеры капли под капилляром, но для абсолютных значений будем иметь

$$R_N = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\sigma}{\rho g} \right)^{1/2}, \quad h_N = \theta_N \left(\frac{\sigma}{\rho g} \right)^{1/2}. \quad (18)$$

Эти величины соответствуют максимальной капле под капилляром, находящейся на пределе своего равновесия. Интересно то, что эти размеры не зависят от радиуса капилляра при выполнении условия (16).

Еще одной интересной оценкой из полученного решения является условие полного отсоса воды из капилляра, он определяется из выражения (12) для $h_W = 0$ при $n_W = 0$

$$\frac{R_c(p_a - p_b)}{\sigma Bo} = \frac{\theta_N}{\chi_N \operatorname{tg}(\chi_N)} \frac{R_N}{R_c} + \frac{2\theta_W}{\chi_W [\exp(\chi_W) - \exp(-\chi_W)]}, \quad (19)$$

откуда следует, что для малых чисел Бонда

$$\frac{R_c(p_a - p_b)}{\sigma} = \frac{R_c}{R_N} \theta_N + \theta_W, \quad (20)$$

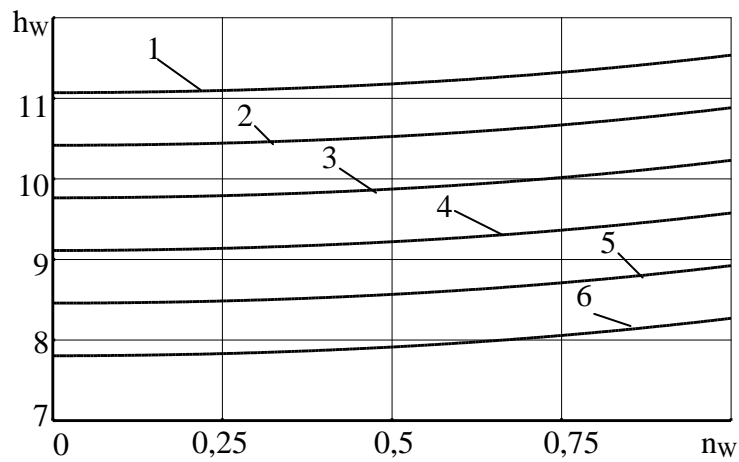
т.е. влияние нижней части слоя жидкости может оказаться заметным.

Покажем теперь численные расчеты для капиллярной трубки радиусом $R_c = 1,5$ мм и для разных углов смачивания. На рис. 2 - 4 показаны поверхности мениска в капилляре (рис. 2) и капли (рис. 3) для соответствующих значений

$\Delta P = \frac{R_c(p_0 - p_a)}{\sigma}$ при $\theta_W = \theta_N = 1$. Из рисунков видно, большей высоте слоя в

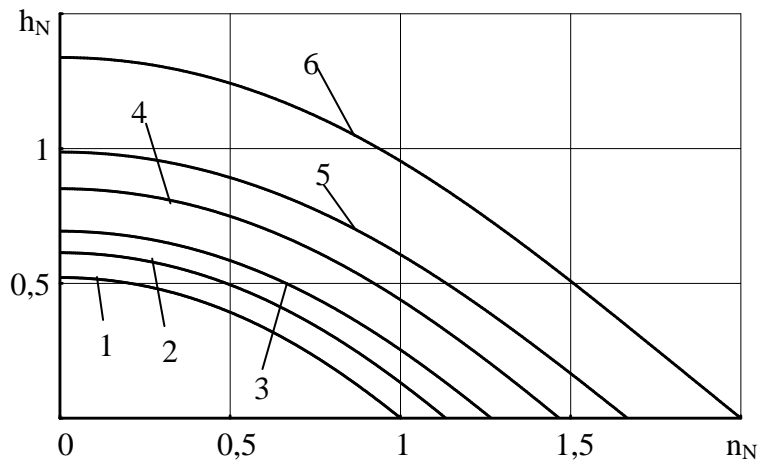
капиллярной трубке соответствует капля с меньшими размерами.

Приведенные на рис. 3 кривые охватывают весь диапазон возможных равновесных капель. Кривая 1 соответствует предельной наименьшей капле, практически висящей на окружности капиллярной трубки, кривые 2-5 характеризуют стабильные образования, кривая же 6 соответствует неустойчивой капле. На рис. 4 приведены кривые, охватывающие также весь диапазон устойчивых капель, но при изменении θ_N ($\Delta P = 1$). Здесь кривая 1 соответствует $\theta_N = 0,577$, а кривая 5 с $\theta_N = 1,2$ соответствует неустойчивой капле. Таким образом, при постоянном перепаде ΔP рост угла смачивания на нижней поверхности приводит к увеличению капли и для некоторого критического значения, близкого к 1,2, к ее неустойчивому положению.



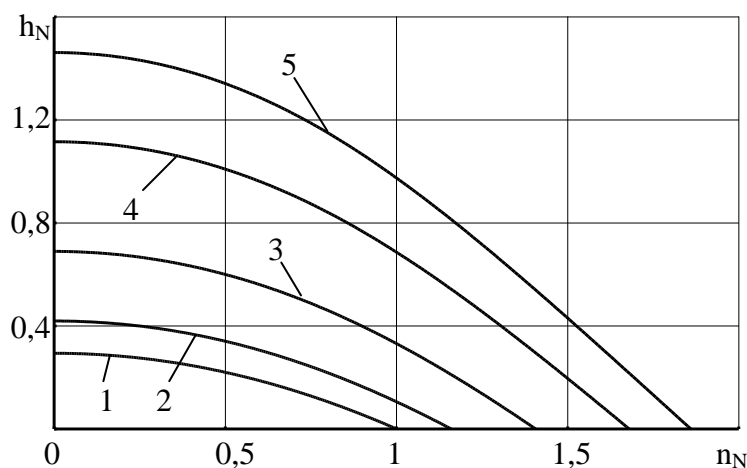
1 – $\Delta P=1,6$; 2 – 1,4; 3 – 1,2; 4 – 1,0; 5 – 0,8; 6 – 0,6

Рис. 2 – Зависимость формы мениска в капилляре от перепада давления ΔP для $\theta_N=1$ и $\theta_W=1$



1 – $\Delta P=1,6$; 2 – 1,4; 3 – 1,2; 4 – 1,0; 5 – 0,8; 6 – 0,6

Рис. 3 – Зависимость формы поверхности капли от перепада давления ΔP для $\theta_N=1$ и $\theta_W=1$



1 – $\theta_N=0,577$; 2 – 0,7; 3 – 0,9; 4 – 1,1; 5 – 1,2

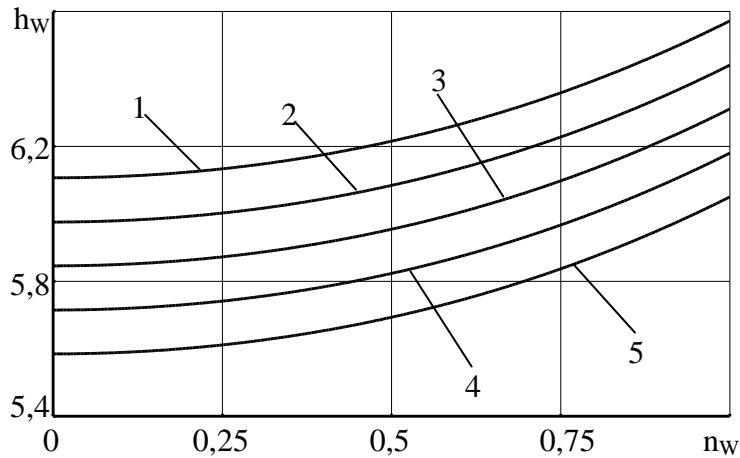
Рис. 4 – Зависимость формы поверхности капли от величины θ_N для $\Delta P=1$ и $\theta_W=1$

При экспериментальном исследовании истечения жидкости из капилляра наблюдалась интересная картина. Если в нижней части капиллярная трубка открыта, то уровень остаточной жидкости в трубке, примерно соответствует данным расчетов для $\theta_W = \theta_N = 1$.

Если же на конце трубки находится мелкоячеистая сетка, то в трубке практически не остается воды, хотя процесс истечения значительно замедляется. Предполагая, что это связано с лучшей смачиваемостью нижней поверхности, проведем расчеты для небольшого угла смачивания, т.е. положим, например, что $\theta_N = 0,1$.

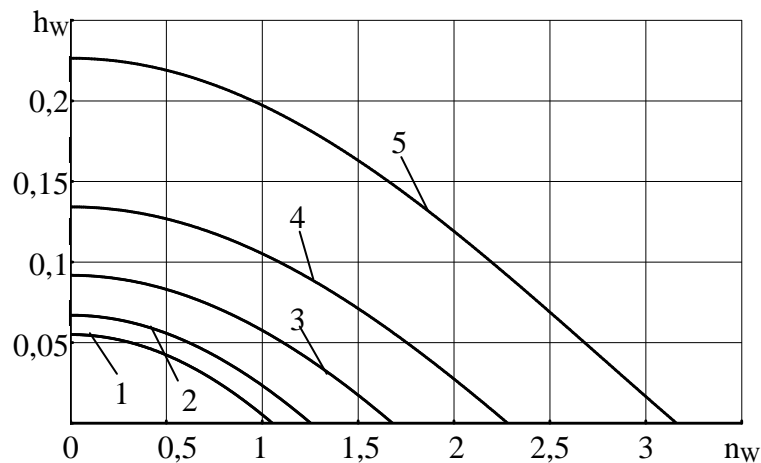
На рис. 5 и 6 приведены кривые поверхности мениска в капилляре (рис. 5) и капли (рис. 6) для этого случая при различных значениях ΔP . Кривой 1 обозначено положение капли, висящей, примерно, как и в первом случае, на окружности капилляра. Для $\Delta P = 0,2$ (кривая 5) капля становится неустойчивой.

Сравнивая кривые 1 на рис. 2 и рис. 5, видно, что высота слоя в трубке во втором случае значительно ниже. Таким образом, лучшая смачиваемость сетки приводит к тому, что остающийся слой жидкости в капиллярной трубке понижается.



1 – $\Delta P=0,18$; 2 – $0,14$; 3 – $0,1$; 4 – $0,06$; 5 – $0,02$

Рис. 5 – Зависимость формы мениска в капилляре от перепада давления ΔP для $\theta_N=0,1$ и $\theta_W=1$



1 – $\Delta P=0,18$; 2 – $0,14$; 3 – $0,1$; 4 – $0,06$; 5 – $0,02$

Рис. 6 – Зависимость формы поверхности капли от перепада давления ΔP для $\theta_N=0,1$ и $\theta_W=1$

В заключение приведем величины относительных размеров объемов жидкости, которые образуют слои. В таблицах 1 - 3 приведены значения безразмерных объемов в капилляре $Q_c = \frac{V_c}{R_c^3}$ и $Q_{cap} = \frac{V_{cap}}{R_c^3}$ (V_c , V_{cap} - объемы воды соответственно в капиллярной трубке и в капле).

Таблица 1 - Значения безразмерных объемов жидкости в капилляре, капле и суммарного объема при $\theta_w = \theta_N = 1$

ΔP	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1	1,0	0,9	0,8	0,7
Q_c	34,44	33,41	32,4	31,37	30,34	29,32	28,29	27,27	26,24	25,22
Q_{cap}	1,01	1,23	1,47	1,73	2,0	2,8	3,12	4,13	5,31	7,78
Q_Σ	35,45	34,64	33,87	33,1	32,34	32,12	31,41	3,4	31,55	33,0

Таблица 2 - Значения безразмерных объемов жидкости в капилляре, капле и суммарного объема при $\Delta P = 1$ ($Q_w = 28,29$)

θ_N	0,557	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2
Q_{cap}	0,46	0,53	0,88	1,37	2,10	3,12	4,71	7,34
Q_Σ	28,75	28,82	29,17	29,66	30,39	31,41	33,00	35,63

Таблица 3 - Значения безразмерных объемов жидкости в капилляре, капле и суммарного объема при $\theta_w = 1$ и $\theta_N = 0,1$

ΔP	0,18	0,16	0,14	0,12	0,10	0,08	0,06	0,04	0,02
Q_c	19,88	19,68	19,47	19,27	19,07	18,86	18,65	18,45	18,24
Q_{cap}	0,10	0,15	0,16	0,33	0,40	0,63	1,04	1,11	3,19
Q_Σ	19,98	19,83	19,63	19,60	19,47	19,49	19,69	19,56	21,43

Из таблиц 1, 2 следует интересная закономерность: с уменьшением ΔP объем жидкости в капилляре монотонно падает, в капле растет, а суммарный объем проходит область минимума, после чего капля достигает неустойчивого положения (в последних колонках этих таблиц капли неустойчивы). При этом объем устойчивой капли по отношению к объему жидкости в капилляре может достигать 10-20% в зависимости от угла смачивания. Как следует из таблицы 2, увеличение угла смачивания при постоянных значениях ΔP приводит к увеличению объема капли и, в конечном итоге, к ее неустойчивости (последняя колонка таблицы соответствует неустойчивой капле).

Таким образом, проведенные расчеты показывают, что остаточная масса в основном определяется жидкостью в капилляре, однако капилляр и капля под ним является как бы единой системой, в которой капля оказывает существенное влияние на остаточную массу капиллярной жидкости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Определение закономерностей опускания жидкости в поровых каналах влажной горной массы, лежащей на сетке / В.П. Надутый, В.И. Елисеев, В.И. Луценко, И.П. Хмеленко // Науковий вісник НГУ. – Днепропетровск, 2009. - №2. - С. 71-74.
2. Равновесные слои жидкости в капиллярной ситовой ячейке / В.И. Елисеев, В.И. Луценко, И.П. Хмеленко, В.П. Надутый // Геотехническая механика: межвед. сб. научн. трудов / ИГТМ НАН Украины. – Днепропетровск, 2008. - Вып. 74. - С. 44 – 54.
3. Финн, Р. Равновесные капиллярные поверхности. Математическая теория / Р. Финн. - М.: Мир, 1989. – 312 с.